DERIVACE FUNKCE

Má zásadní význam při vyšetřování funkčních závislostí nejen v matematice, ale také v aplikacích, např. v chemii, fyzice, ekonomii a jiných vědních oborech.

Princip derivování formulovali v 17. století nezávisle na sobě německý matematik G.W. Leibniz (na základě úvah o tečně ke grafu funkce) a anglický fyzik I. Newton (úvahami o okamžité rychlosti).

Poznámka : Jako limitu podílu přírůstku funkce a přírůstku proměnné je možné vyjádřit okamžitou rychlost pohybujícího se bodu. Jestliže se těleso pohybuje přímočaře a jeho dráha *s* je funkcí času *t*, pak jeho okamžitá rychlost v v okamžiku t_0 je daná vztahem $v_0 = s'(t_0)$.
Ve fyzice bývá zvykem značit derivaci podle proměnné *t* (podle času) tečkou, proto píšeme $v = \dot{s}(t)$.
Podobně, jestliže průběh fyzikální veličiny *m* je funkcí času *t*, potom okamžitá změna *v* této veličiny v čase *t* je daná vztahem $v = \dot{m}(t)$. Tímto způsobem můžeme popsat rychlost chemické reakce, intenzitu elektrického proudu, rychlost růstu populace, rychlost růstu firmy a devalvace v ekonomii a celou řadu dalších veličin z různých oblastí přírodních a technických věd.

Definice : Derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0 nazýváme (pokud existuje) limitu

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} .$$

Značíme ji $f'(x_0)$.

Poznámka : Říkáme, že funkce má derivaci na intervalu **I**, má-li derivaci v každém bodě tohoto intervalu. Zatímco derivace v bodě x_0 je číslo $f'(x_0)$, derivace na intervalu **I** je funkce $f'(x)$ pro $x \in \mathbf{I}$.

Při praktickém počítání neurčujeme derivace funkcí užitím definice, tj. jako limitu, ale pomocí pravidel a vzorců, které jsou z definice odvozeny:

Pravidla :

P 1 $(k\cdot u)' = k\cdot u'$ — k je konstanta

P 2 $(u \pm v)' = u' \pm v'$ — u, v jsou funkce proměnné x

P 3 $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$

P 4 $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Vzorce :

V 1 $k' = 0$, k je konstanta

V 2 $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, speciálně $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

V 3 $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

V 4 $(\mathrm{a}^x)' = \mathrm{a}^x \cdot \ln \mathrm{a}$

V 5 $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

V 6 $(\log_\mathrm{a} x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln \mathrm{a}}$

V 7 $(\sin x)' = \cos x$

V 8 $(\cos x)' = -\sin x$

V 9 $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

V 10 $(\mathrm{cotg}x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

V 11 $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

V 12 $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

V 13 $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

V 14 $(\mathrm{arccotg}x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

Příklad : Derivujte $y = x^5 - x + \sin x$.

Nejdříve použijeme P2 (derivace součtu a rozdílu),
$y' = (x^5)' - (x)' + (\sin x)'$, potom použijeme na první dva členy V2 a na třetí V7.
Tedy $y' = 5x^4 - 1 + \cos x$.

Příklad : Derivujte $y = \dfrac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x} - \ln x$.

Použijeme opět nejdříve P2 a potom V2 a V5 . Uvědomte si, že $\dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$ a $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$.

$$y' = \left(\frac{1}{x^2}\right)' + \left(\sqrt[3]{x}\right)' - \left(\ln x\right)' = -2 \cdot x^{-3} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{x} = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x}.$$

Příklad : Derivujte $y = 3x^2 - \sqrt[4]{x^5}$.

Použijeme opět nejdříve P2 a na první člen P1 (vytkneme konstantu). Potom V2.

$$y' = 3(x^2)' - (\sqrt[4]{x^5})' = 3 \cdot 2x^1 - \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}} = 6x - \frac{5}{4}\sqrt[4]{x} .$$

Příklad : Derivujte $y = x^3 \cos x$.

Nejdřív rozepíšeme podle P3 (derivace součinu): $y' = (x^3)' \cos x + x^3 (\cos x)'$,
dál pomocí V2 a V8 $= 3x^2 \cos x + x^3(-\sin x)$.
Výsledek můžeme upravit , pak $y' = x^2(3\cos x - x \sin x)$.

Pravidlo P3 lze zobecnit na konečný počet činitelů. Derivace je potom rovna součtu součinů všech činitelů, z nichž se právě jeden derivuje (postupně od prvního k poslednímu)
$(u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_k)' = (u_1)' \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_k + u_1 \cdot (u_2)' \cdot \ldots \cdot u_k + \ldots + u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot (u_k)'$

Příklad : Derivujte $y = \mathrm{e}^x \cdot \ln x \cdot \mathrm{tg} x$.

Rozepíšeme podle pravidla pro derivaci součinu:
$y' = (\mathrm{e}^x)' \cdot \ln x \cdot \mathrm{tg} x + \mathrm{e}^x \cdot (\ln x)' \cdot \mathrm{tg} x + \mathrm{e}^x \cdot \ln x \cdot (\mathrm{tg} x)'$. Dále pomocí V3, V5 a V9.
$= \mathrm{e}^x \cdot \ln x \cdot \mathrm{tg} x + \mathrm{e}^x \cdot \dfrac{1}{x} \cdot \mathrm{tg} x + \mathrm{e}^x \cdot \ln x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
Po zderivování bychom mohli výsledek upravit vytýkáním:
$= \mathrm{e}^x \left(\ln x \cdot \mathrm{tg} x + \dfrac{1}{x} \cdot \mathrm{tg} x + \ln x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} \right)$.

Příklad : Derivujte $y = \dfrac{x^3}{x-1}$.

Podle P4 je $y' = \dfrac{(x^3)' \cdot (x-1) - x^3 \cdot (x-1)'}{(x-1)^2}$. Zbývá derivovat členy v čitateli a upravit

$$y' = \frac{3x^2 \cdot (x-1) - x^3 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{3x^3 - 3x^2 - x^3}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2}.$$

Jestliže je ve jmenovateli zlomku, který budeme derivovat pouze konstanta, můžeme použít P1 a vzorce

Příklad : Derivujte $y = \dfrac{\mathrm{tg} x}{\sqrt{2}}$.

Funkci můžeme zapsat ve tvaru $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{tgx}$.

Potom je podle P1 $y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos^2 x}$.

Poznámka: Derivaci je samozřejmě možné provést i užitím P4.

$y' = \dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}\sqrt{2} - \mathrm{tg}x \cdot 0}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{\cos^2 x}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\cos^2 x}$. Tento výsledek je stejný, jako při předchozím postupu, stačí zlomek krátit $\sqrt{2}$.

Příklad : Vypočtěte hodnotu první derivace funkce $y = x^4 \cos x$ v bodě $x = \pi$.

Užitím P3 a vzorců V2 a V8 dostaneme $y' = 4x^3 \cdot \cos x + x^4 \cdot (-\sin x)$.
Pro výpočet derivace v bodě není třeba dál funkci upravovat. Po dosazení
$y'(\pi) = 4\pi^3 \cdot (-1) + \pi^4 \cdot (0) = -4\pi^3$.

Derivace složené funkce

je rovna součinu derivací jednotlivých složek : $F(x) = f(g(x)) \quad \Rightarrow \quad F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Platí i pro vícenásobně složené funkce. Je-li $F(x) = f(g(h(x)))$, potom derivace
$F'(x) = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$.

Příklad : Derivujte $y = \left(x^2 + 5x + 3\right)^6$.

Vnější složka je 6.mocnina, vnitřní kvadratická funkce. Podrobněji $y = u^6$ a $u = x^2 + 5x + 3$.

$y' = 6\left(x^2 + 5x + 3\right)^5 \cdot \left(x^2 + 5x + 3\right)' = 6\left(x^2 + 5x + 3\right)^5 \cdot \left(2x + 5\right)$.

Příklad : Derivujte $y = \sqrt{\sin x}$.
Funkce má vnější složku $y = \sqrt{u}$ a vnitřní $u = \sin x$.
Nejdříve derivujeme vnější složku a v dalším kroku vnitřní :

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \left(\sin x\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \left(\cos x\right) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$.

Příklad : Derivujte $y = \ln\sqrt{\mathrm{e}^{2x}}$.
Funkce má 4 složky.

$y' = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}}} \cdot \left(\sqrt{\mathrm{e}^{2x}}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}^{2x}}} \cdot \left(\mathrm{e}^{2x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}^{2x}}} \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot (2x)' = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}^{2x}}} \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot 2$.

Upravíme-li na jeden zlomek vykrátíme, bude $y' = 1$.

Příklad : Vypočtěte hodnotu první derivace funkce $y = 2x + (x^2 - 3) \cdot \mathrm{arctg}x$ v bodě $x = 0$.

$$y' = (2x)' + (x^2 - 3)' \cdot \mathrm{arctg}5x + (x^2 - 3) \cdot (\mathrm{arctg}5x)' = 2 + 2x \cdot \mathrm{arctg}5x + (x^2 - 3) \cdot \frac{1}{1 + (5x)^2} \cdot 5$$

Protože počítáme derivaci v bodě, nebudeme funkci upravovat, ale přímo dosadíme $x = 0$.

$$y'(0) = 2 + 2 \cdot 0 \cdot \mathrm{arctg}0 + (0^2 - 3) \cdot \frac{1}{1 + (0)^2} \cdot 5 = 2 - 3 \cdot 5 = -13.$$

Derivace vyšších řádů vypočítáme postupným derivováním derivací řádů nižších, pokud existují.

Definice: Derivace funkce $f(x)$ je opět funkce. Má-li tato funkce $f'(x)$ derivaci, nazýváme ji druhou derivací funkce $f(x)$ a značíme ji $f''(x)$.

Obecně n-tou derivaci funkce $f(x)$ definujeme vztahem $f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$.

Třetí derivaci funkce značíme symbolem $f'''(x)$, ale u vyšších derivací už označujeme jejich řád číslem v závorkách : $f^{(4)}(x)$, $f^{(5)}(x)$, … , $f^{(n)}(x)$.

Kromě uvedeného značení vyšších derivací se používá ve fyzice a technických oborech také značení : $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$, $f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$, ..., $f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$.

Příklad : Vypočtěte derivaci druhého řádu funkce $y = \frac{1 - 3x}{x^2}$.

Nejdříve vypočteme a upravíme první derivaci:

$$y' = \frac{-3 \cdot x^2 - (1 - 3x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-3x^2 - 2x + 6x^2}{x^4} = \frac{3x^2 - 2x}{x^4} = \frac{x(3x - 2)}{x^4} = \frac{3x - 2}{x^3}.$$

Potom opět derivujeme

$$y'' = \left(\frac{3x - 2}{x^3}\right)' = \frac{3 \cdot x^3 - (3x - 2) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{3x^3 - 9x^3 + 6x^2}{x^6} = \frac{6x^2 - 6x^3}{x^6} = \frac{6x^2(1 - x)}{x^6} = \frac{6(1 - x)}{x^4}$$

Příklad : Určete hodnotu derivace třetího řádu funkce $y = x^5 - x^4 + 3x + 2$ v bodě $x = -2$.

$y' = 5x^4 - 4x^3 + 3$

$y'' = 20x^3 - 12x^2$

$y''' = 60x^2 - 24x \quad \Rightarrow \quad y'''(-2) = 60 \cdot 4 - 24 \cdot (-2) = 240 + 48 = 288.$